La logique catégoriale entre inscription littérale et diagramme, sous condition du *figural.*[1]

Emmanuel Brassat

Introduction

Je ne ferai pas semblant d'être mathématicien. Je ne le suis pas, plutôt philosophe du discours, analyste des discours, certes un peu logicien, mais peut-être pas non plus suffisamment. De plus, on ne peut que difficilement se décréter soi-même philosophe, les diplômes n'y suffisent pas. Cependant, du fait de mes études, je n'ignore pas l'injonction platonicienne adressée jadis par le philosophe Platon aux adeptes d'une quête de la connaissance et candidats à son école : *que nul n'entre ici s'il n'est géomètre.* Cela donnait aux mathématiques une valeur propédeutique et initiatique qui devait venir précéder l'exercice dialectique. Ma présence aujourd'hui dans ce colloque n'est pas sans lien à cette injonction. Bien entendu, comme beaucoup, j'ai fait un peu de mathématiques, de l'école élémentaire jusqu'au Lycée, étudié l'arithmétique des nombres entiers et des réels et la géométrie euclidienne, aussi vectorielle, pratiqué un peu d'algèbre et d'analyse, d'étude des fonctions et aussi reçu des leçons de logique ensembliste. Les programmes scolaires le voulaient. Durant mes études de philosophie, j'ai également rencontré la logique des propositions et des prédicats de premier ordre, la théorie du raisonnement déductif et la théorie classique des catégories de Aristote à Kant, la logique dialectique également d'un Hegel. Par souci d'histoire de la pensée, j'ai également essayé de comprendre les enjeux de formalisation en mathématiques et d'axiomatisation en logique depuis Leibniz et Bolzano, Boole, Cantor et Frege, jusqu'aux théorème de Gödel et de Church, à la machine de Turing, en passant par les recherches logiques d'un Husserl. Et si je ne suis pas instruit dans le domaine des mathématiques, je n'ignore pas pour autant l'existence de recherches en philosophie marquées par un lien très direct aux mathématiques, comme celles de Russel, Whitehead, Wittgenstein, Carnap, Couturat, Cavaillès, Lautmann, Vuillemin, Desanti, Badiou, Salanskis. J'ai donc quelques petites connaissances relatives à la nature des problèmes conceptuels qui ont pu se poser en mathématiques et plus particulièrement en logique. L'enseignement que j'ai pu recevoir d'Alain Badiou en la matière n'y est pas pour rien et je reconnais avoir beaucoup appris de lui sur ce plan. Cependant je ne prétendrais pas pouvoir atteindre au niveau d'élaboration et de saisie des problèmes qui est celui des philosophes des mathématiques et

[1] Ce texte est la version écrite d'une intervention orale faite au colloque de l'association Lysimaque *Lacan et Grothendieck : l'impossible rencontre ?* qui s'est tenu à Paris à l'ASIEM, les 21 et 22 mai 2022.

des mathématiciens. Je risquerai de me montrer ridicule. Néanmoins, le philosophe et mathématicien Pascal disait qu'il valait mieux savoir un peu de tout pour être un honnête homme que de se satisfaire de tout savoir d'une seule chose, de n'être qu'un spécialiste ou expert. Cependant, Pascal savait lui vraiment beaucoup dans beaucoup de domaines, ce qui lui permettait de soutenir brillamment un tel propos par sa personne. Je ne crois pas pouvoir l'égaler. Ce qui suit est en quelque sorte un parcours dans lequel je me suis efforcé de me tenir en suivant quelques-unes de mes intuitions.

1/ Perspectives et hypothèses

Nous sommes ici pour réfléchir à partir ou sur la pensée et la personne de Grothendieck. Techniquement et épistémologiquement parlant ses travaux sont pour moi hors de portée. Par ailleurs, il s'agirait également d'associer Grothendieck et Lacan comme le fait la lettre de l'intitulé du colloque. Une telle association m'a paru a priori assez improbable, car je ne vois pas grand rapport entre eux, si ce n'est que Lacan se sera soucié à sa façon de topologie ensembliste et Grothendieck également par ses importantes recherches en topologie algébrique. Pour l'instant, je laisserai la question de leur rencontre ou pas ouverte à la spéculation. Et s'ils se sont réellement rencontrés au moins une fois dans leur vie physiquement, on ne trouve pas chez Lacan de références précises à des outils mathématiques qui proviendraient des travaux et recherches de Grothendieck. Par ailleurs, dans le rapprochement de leurs noms, c'est la question de la rencontre entre mathématiques et psychanalyse qui nous est plus directement posée. Une question des plus difficiles, car si Lacan a voulu se montrer logicien et peut-être aussi mathématicien à sa façon, le lien entre psychanalyse et mathématiques ne va pas de soi qu'on soit mathématicien, philosophe ou psychanalyste.

La différence entre Lacan et Grothendieck repose peut-être aussi sur le fait que si le premier a pu emprunter aux mathématiques et aux mathématiciens pour « mathématiser » la psychanalyse freudienne, il n'a jamais été lui-même à proprement parler un mathématicien professionnel. Néanmoins, Lacan aura laissé de nombreuses écritures formulaires de type algébrique, des graphes, des réseaux, des schémas, eu très largement recours à la topologie géométrique, à la logique formelle, semblant s'appuyer comme Lévi-Strauss avant lui sur des constructions analytiques empruntées aux mathématiques.[2] Ce dernier avait emprunté, en plus de la linguistique structurale, à l'algèbre des permutations, à la statistique, à la théorie

[2] Le Roux, Ronan. *Structuralisme(s) et cybernétique(s). Lévi-Strauss, Lacan et les mathématiciens.* Dossiers d'HEL, SHESL, 2013, les structuralismes linguistiques : problèmes d'historiographie comparée, 3, pp.1-30. Hal-01311984.

mathématique de la communication et à la cybernétique. Ainsi les notions de graphe, de structure, de morphisme, de groupe de transformations, de tétraèdre des discours, de fonction et d'analyse, les emprunts à la topologie géométrique, l'analyse des nœuds, des surfaces et des entrelacs, la référence à la logique ensembliste, apparaissent dans les travaux et enseignements de Lacan assez largement, mais rien ne permet d'affirmer que ce sont là des travaux purement mathématiques. Il s'agit plutôt d'un usage développé par Lacan des mathématiques en psychanalyse qu'il put mener avec l'appui de quelques mathématiciens qui y trouvèrent aussi leur intérêt, ainsi des figures comme P. Soury, J-M. Vappereau, J-C Terrasson, M. Thomé.

Dans mon propos, je voudrais procéder essentiellement à partir d'hypothèses surtout intuitives, périphériques à toute problématisation directe du rapport entre psychanalyse et mathématiques. Ce faisant, je voudrais essayer de parvenir à rencontrer philosophiquement les préoccupations de Grothendieck sur quelques points, à partir de ce que j'ai pu comprendre de la théorie mathématique des catégories. Ceux qui suivaient les enseignements d'A. Badiou avaient pu entrevoir ce qu'était la théorie logique et mathématique des *catégories* au développement de laquelle ce grand mathématicien qu'était Grothendieck avait très largement participé durant les années soixante-dix. Elle apparaissait dans l'enseignement que nous en donnait Badiou comme à la fois une alternative à l'algèbre logique ensembliste du groupe de mathématiciens Bourbaki, corrélative de celle de Boole, et comme un prolongement et développement de celle-ci. Badiou la présentait ainsi en la rapprochant de la dialectique hégélienne, d'une détermination du global par le local, d'une acceptation du tiers-inclus, donnant aux fonctions ou principes logiques une délimitation plus précise, notamment par le recours à ce que j'appellerai une expression graphique de la logique. Il s'agissait d'un passage, toujours selon Badiou, du transcendantal ensembliste, plutôt platonicien, à une immanence au monde vécu de la catégorie, plutôt aristotélicien. Ce qui bien évidemment n'est pas sans conséquences sur les plans logiques et phénoménologiques. Ainsi pour la logique classique, binaire, l'affirmation et la négation d'une négation ont une même valeur. Pour une logique phénoménologique dialectique, ce n'est plus le cas, la négation de la négation produisant une affirmation nouvelle qui n'équivaut pas à l'affirmation initiale. De plus, à la différence de la logique ensembliste, la dite *logique des catégories* ne présuppose plus une définition ontologique des objets, ou de classes d'objets et des relations qui les apparient ou non. Elle fait prévaloir la notion de *fonction*, exprimée chez elle par des *morphismes* au sein d'une *catégorie*, c'est-à-dire par des *flèches* reliant deux objets ou structures, sans que ces derniers soient nécessairement des *ensembles*. Le déterminant relationnel extrinsèque de la fonction venant ici prévaloir sur le déterminant ontologique intrinsèque de l'appartenance.

Ce qui entraîne de relativiser la relation d'appartenance de l'élément à un ensemble non vide comme principe premier de toute relation logique.

Néanmoins, l'idée de pouvoir délimiter la logique, voire la représenter, par des liens ou schémas graphiques donnant lieu à une appréhension visuelle, ou idéo-visuelle, de ses formes et dispositions n'est pas en soi intégralement nouvelle. Elle se présente plus ou moins dès que l'on ne sépare pas dans une définition formelle de la logique l'écriture des axiomes, propositions, règles, liens d'inférence et schématisme géométrique ou graphique, autrement dit ce qui se produit si l'on pense pouvoir associer dans une logique formelle générale les raisonnements arithmétiques et géométriques. Cela, il semble que nombre de successeurs ou adversaires en logique d'Aristote auront plus ou moins tenté de le faire ou en auront rencontré le problème depuis Apulée, auteur du fameux *carré logique*, en passant par R. Lulle et P. de La Ramée, puis par la suite encore plus significativement des mathématiciens comme L. Euler ou J. Venn, l'un des précurseurs de la théorie des ensembles à la fin du XIXe siècle. Et si, dès Leibniz, a été conçue par celui-ci l'hypothèse d'une *caractéristique universelle* ou *idéographie,* c'est-à-dire d'une *écriture conceptuelle* ou algébrique universelle pour représenter les processus déductifs et leurs règles de formation et de validation indépendamment des contenus, ou des interprétations spécifiques qu'on pouvait en produire, celle-ci s'est accompagnée très nettement chez le même Leibniz de l'idée d'une *analysis situs.* C'est-à-dire d'une théorie géométrique qualitative des formes et des relations qui préfigure la notion actuelle d'espace topologique depuis Poincaré. En ce sens, Leibniz a pu écrire que la logique ne serait rien d'autre qu'un « miroir des relations ». En ce sens la logique serait l'écriture analytique combinatoire de nature schématique des propriétés qualitatives et spatiales d'un tissu conjonctif de relations qui feraient la matière continue du réel.

Et, effectivement, pour représenter les types d'opérations logiques, les philosophes logiciens auront souvent confectionné des sortes de tableaux analytiques, de tableaux systématiques permettant de classer et d'ordonner les types de raisonnements et les concepts ou classes de jugements employés selon l'ordonnancement méthodique de leurs possibles combinaisons. Des schémas articulant ensemble des structures graphiques, comme des arbres, et une combinatoire de possibilités déductives répondant à des règles inférentielles explicites et ordonnées, également calculables. Kant, à son tour, élabora une table des jugements logiques et celle des catégories conceptuelles les plus générales permettant de les formuler. Dès qu'on a recours à une tabulation indiquant la disposition des schèmes ou des structures logiques ou que l'on cherche à produire visuellement sous forme d'un graphe, d'un diagramme les propriétés logiques en elles-mêmes, on quitte l'écriture littérale ou algébrique pour autre chose qui vient supplémenter l'écriture caractéristique. Quelque chose surgit que l'on pourrait dire « topologique » et « graphique » en un sens ici d'abord métaphorique pour désigner une logique projective dans l'espace des lieux ou éléments invoqués par le discours déductif (points, formes, propriétés, arguments, objets), de leurs positions et relations. On m'objectera que tout symbolisme des règles opératoires de construction des objets, qu'ils soient numériques ou géométriques, n'est pas nécessairement toujours d'ordre graphique et qu'il doive donner lieu nécessairement à des figures visualisées, à des graphes, cela au-delà du recours à une écriture formelle de type littérale ou algébrique. Cela est très probablement vrai, mais si l'écriture de la logique classique a pu donner lieu à une algèbre, comme celle proposée par Boole, il n'est pas non plus exclu à titre d'hypothèse qu'on puisse aussi en proposer des schématisations de type graphique. La présence récurrente dans les études de logique d'un recours à des schémas graphiques, à des diagrammes permet de le supposer.

Or c'est bien d'un tel usage du graphique et du littéral conjointement, d'une écriture algébrique et figurative des relations ou complexions, qu'on peut trouver la recherche et l'expression chez Lacan. Est-il d'ordre mathématique ? Difficile de le dire. Il emprunte aux mathématiques, c'est certain. Lacan le revendiquait d'abord comme d'ordre logique plus que topologique. Mais l'un peut-il aller sans l'autre ? Par ailleurs, on peut faire de la logique le cœur universel des mathématiques, cela a pu être soutenu à plusieurs reprises depuis Leibniz. Or d'un tel usage conjoint du graphique et du littéral sous condition de la logique, on pourrait dire, c'est là une hypothèse, qu'il fut surtout d'ordre *imaginaire* chez Lacan. Et pour prévenir toute objection, *imaginaire* est à prendre ici au sens précis et non péjoratif de devoir recourir pour concevoir objectivement l'inconscient, à titre d'objet impossible à inscrire, à une fonction à la fois schématique et littérale, ni simplement géométrique ou algébrique, mais plutôt logique, dont certains aspects des mathématiques sont l'illustration très directe et la plus puissante.

Une telle fonction logique, le grand logicien et mathématicien du XVIIe siècle J. Jungius, auteur d'une *Analyse heuristique* ou *didactique*, auquel Leibniz se réfère très directement, a pu la référer au procédé de l'*ecthèse* qui provient de l'écriture des géomètres. Elle permet de déterminer le singulier comme participant à une règle universelle sans pour autant en supprimer les aspects localisés en les réduisant à des traits seulement généraux. Leibniz écrit ainsi en se référant à Jungius :

> « J'appelle démonstration ecthétique non pas celle qui tire d'un seul terme une conclusion particulière valant pour tel ou tel uniquement, mais celle qui traite tous les termes impliqués comme des singuliers, de telle sorte cependant que [les relations] ne soient

restreintes à aucune matière, ni qu'elles ne soient davantage limitées par leurs différences immatérielles qu'elles ne le sont dans la proposition en question ». [3]

Par *ecthèse*, il faut entendre un raisonnement démonstratif non linéaire qui ne repose pas sur une déduction abstraite universalisante en soi, cartésienne, mais qui permet d'articuler du local sur du global sans discontinuité à partir des places singulières qui situent les objets en géométrie.

2/ Définitions générales

Quel lien faut-il ou peut-on faire entre dimension logique et dimension graphique ? Là est la question, mais pour l'éclaircir il faut peut-être aussi en passer par des notions mathématiques. La théorie des graphes est à l'origine de la théorie des catégories, elle l'a précédée et peut s'y voir reliée. Mais qu'est-ce qu'un graphe ? En mathématiques, plus précisément en *théorie des graphes* qui est un domaine des mathématiques et selon le dictionnaire Wikipédia, la définition compréhensible qui en est donnée est la suivante :

« Un **graphe** est une structure composée d'objets dans laquelle certaines paires d'objets sont en relation. Les objets correspondent à des abstractions mathématiques et sont appelés *sommets* (ou *nœuds* ou *points*), et les relations entre sommets sont des *arêtes* (ou *liens* ou *lignes*). On distingue les **graphes non orientés**, où les arêtes relient deux sommets de manière symétrique, et les **graphes orientés**, où les arêtes, alors appelées *flèches*, relient deux sommets de manière asymétrique. Un graphe est fréquemment représenté par un diagramme sous la forme d'un ensemble de points pour les sommets, joints entre eux par des lignes droites ou courbes pour les arêtes, éventuellement munies de flèches pour le cas de graphes orientés. Les graphes sont l'un des objets d'étude du champ des mathématiques discrètes. Les graphes constituent l'objet de base de la théorie des graphes. Le mot « *graph* » a été utilisé pour la première fois dans ce sens par James Joseph Sylvester en 1878. »

Une telle définition ne m'est pas en soi inaccessible et me porte à lui associer la théorie des catégories par une effet de rapprochement, d'analogie, comme si les concepteurs de celle-ci avaient utilisé un tel instrument pour le transposer à la logique et à la topologie algébrique. Au reste, effectivement les graphes sont utilisés en informatique dans la construction des programmes. De plus, une catégorie peut se définir comme une forme de graphe orienté. Mais qu'est-ce donc que la théorie mathématique des catégories ? Je reprends le dictionnaire des notions mathématiques de Wikipédia :

« La **théorie des catégories** étudie les structures mathématiques et leurs relations. L'étude des catégories, très abstraite, fut motivée par l'abondance de caractéristiques communes à diverses classes liées à des structures mathématiques. Les catégories sont utilisées dans la plupart des branches mathématiques et dans certains secteurs de

[3] Cité par Arnaud Pelletier, in « Logica est scientia generalis. Leibniz et l'unité de la logique », publié dans *Archives de la philosophie* 2013/2 (Tome 76), p. 271 à 294.

l'informatique théorique et en physique. Elles forment une notion unificatrice. Cette théorie a été mise en place par Samuel Eilenberg et Saunders Mac Lane en 1942-1945, en lien avec la topologie algébrique, et propagée dans les années 1960-1970 en France par Alexandre Grothendieck, qui en fit une étude systématique. À la suite des travaux de William Lawvere, la théorie des catégories est utilisée depuis 1969 pour définir la logique et la théorie des ensembles ; la théorie des catégories peut donc, comme la théorie des ensembles ou la théorie des types, avec laquelle elle a des similarités, être considérée comme fondement des mathématiques.»

Ici tous les mots pèsent et résonnent lourdement pour un philosophe. La théorie des catégories apparaît comme un moyen de relier entre elles des structures mathématiques dans une logique d'analyse relationnelle et peut trouver place comme fondement des mathématiques. Catégories, structures, fondements, semblent tisser une constellation conceptuelle qui fait écho à l'ancienne métaphysique, à ce qui en philosophie relevait de l'ontologie, des principes premiers de toute connaissance.

3/ La catégorie en philosophie

Pour un non-mathématicien tout cela paraitra très elliptique et peu accessible. Néanmoins, ce que le philosophe aussitôt entend, c'est la relation entre cette théorie et la question des fondements. En métaphysique, la notion de fondements correspond à ce qu'il faut poser comme étant au principe, au principe de toute connaissance : essences, formes, causes, règles logiques, catégories, puissance, actualité. Dans son manuel de logique, l'*Organon,* Aristote fait des catégories les termes les plus généraux de toute existence. Elles sont au nombre de dix : la substance, la quantité, la qualité, la relation, le lieu, le temps, la position, l'action, la passion. Curieusement, le sens premier en grec de catégorie est celui d'accusation, au sens de parler contre, de parler auprès. Comme s'il s'agissait par la catégorisation de se tenir au plus près de l'objet naturel ou réel, de se saisir de l'objet en tant qu'il se tient situé à l'encontre, à même sa place, en allemand *Gegenstand,* littéralement ce qui se tient contre, au plus près. Par ailleurs Aristote ajoute aux dix catégories, cinq catégorèmes qui sont les dénivellations de la qualité pour un objet donné qui permettent de le catégoriser : le genre, l'espèce, la différence, le propre et l'accident. De tels termes auront constitué pendant plusieurs siècles les normes les plus générales de la pensée et de la science, ce qui n'est pas rien. Ils sont donc encore de sens commun, ayant déposé dans les langues latines et les différentes sciences un sel philosophique d'origine grecque. C'est dire qu'ils auront pu faire sol et fondations. On les retrouve comme les déterminants de nombre de nos opérations les plus spontanées de pensée et normes structurantes des formes grammaticales et de l'expression commune. Certes, ce ne sont plus là tout à fait des fondements, bien que chacune de ces catégories soit toujours opérante dans les jugements de connaissance. A cette différence près, c'est que chacune de ces notions a pu recevoir des lignes de définition la complexifiant au point de l'éloigner absolument de toute perception ou appréhension objective ordinaire, de tout sens immédiatement commun. C'est d'une telle crise et d'un tel écart entre science et perception spontanée que sont nées la science moderne et la mathématisation de la nature, dans l'abandon de toute évidence intuitive qui procéderait de cette même perception spontanée. Ainsi la réalité matérielle première, la temporalité, le lieu physique, la position dans l'espace, les systèmes de calcul, bien que les notions de relations, d'activité, soient, elles, toujours très opérantes. La relation comme anaphore ou analogie, ou encore synthèse, l'activité comme dynamique ou ergonomie, sont des termes encore très opérants dans la connaissance. De même la distinction du passif et de l'actif reste tout à fait nodale, y compris en économie. C'est-dire que l'on n'échappe peut-être pas à une pensée catégoriale, à la nécessité d'une théorie des catégories, d'un désir d'attribuer à l'être en général des propriétés premières discernables.

Chez Kant les catégories sont les formes a priori de la connaissance, plus précisément les concepts purs de notre entendement, autrement dit les notions princeps qui nous permettent de juger de la nature des choses, de les déterminer en compréhension en caractérisant la manifestation objective perçue par la sensibilité. Pour lui, elles sont au nombre de douze : Unité, pluralité, totalité, réalité, négation, limitation, substance, cause, réciprocité, possibilité, existence, nécessité. Et si l'on peut certes opposer le catégorial de la science et l'existential du vécu subjectif, cela ne supprime pas sur un plan logique la nécessité ou le souci d'une synthèse catégoriale. Disons que, curieusement encore, depuis l'essor de la logique formelle en mathématique, les questions autrefois métaphysiciennes relatives aux principes de la connaissance que traitaient les philosophes sont désormais entre les mains des mathématiciens et des logiciens.

4/ La théorie mathématique topologique.

Venons-en à la théorie mathématique des catégories, du moins à ce que je peux en comprendre. Selon l'édition de 1968 de l'*Encyclopedia universalis*, en mathématiques une catégorie est un outil de topologie algébrique :

> « Dès 1952, en définissant les théories de l'homologie comme foncteurs d'une **catégorie** d'espaces topologiques dans une **catégorie** algébrique vérifiant certains axiomes et en classifiant ces théories, Eilenberg et Steenrod mettaient en évidence le rôle des **catégories** comme outil pour la topologie algébrique. »

Une telle définition est éminemment complexe et compliquée, assez peu accessible en soi. Observons que la catégorie se voit ici reliée à celle d’espace topologique par le biais d’une homologie au sein d’une catégorie algébrique.

Il faut ici donc tout d’abord préciser ce que l’on appelle *topologie algébrique*.

Pour cela il faut d’abord définir la *topologie*. La notion de topologie fut introduite en mathématiques par J.B. Listing en 1847, et procède des notions de limite et continuité. La topologie, littéralement est une logique des lieux, des places et de leurs relations. Disons aussi qu’elle est une topique des passages et des contours, des entrelacs et des intervalles, des proximités et des conjonctions, des frontières et de la littoralité, des superpositions et des nouages, du réversible.

En analyse mathématique, la notion de *limite* décrit l’approximation des valeurs d'une suite lorsque l'indice tend vers l’infini, ou d'une fonction lorsque la variable se rapproche d’un point (éventuellement infini) au bord du domaine de définition. Transposée à la géométrie, la notion de limite est relative par exemple à la détermination des points délimitant la circonférence d’un disque en fonction de la longueur des rayons. Elle permet également de poser la notion de frontière.

La *continuité* est associée à la notion de *continuum* dont l'origine est géométrique. Dans un continuum géométrique non discret, comme le plan ou l'espace, un point peut se déplacer continument pour s'approcher selon une précision arbitraire d'un autre point. On peut par ailleurs faire correspondre les nombres réels et la droite géométrique en y intégrant les nombres irrationnels comme des valeurs approchées, intervallaires.

La définition la plus accessible de la topologie en est la suivante : *l’étude des propriétés invariantes dans la déformation géométrique des objets et dans les transformations continues appliquées à des êtres mathématiques*. En ce sens, si l’on déforme de façon continue, sans rupture, sans arrachage ni recollement et en les préservant, un cercle, une ellipse, une couronne, la paroi latérale d’un cylindre de révolution, une tasse et un tore, ils sont homéomorphes. Ils conservent et possèdent donc les mêmes propriétés malgré leur déformations.

Par ailleurs, la topologie étudie des *espaces* dits *topologiques*. Selon la théorie ensembliste, un ensemble quelconque regroupant une collection d’éléments est un espace, ce qui permet d’étendre la topologie à un grand nombre d’objets mathématiques. Il en découle donc, en topologie, que les ensembles sont munis d’une propriété dite de *voisinage*. Elle détermine autour de chaque point un espace interne à l’ensemble fait de points intérieurs à celui-ci. Il s’agit de définir comme une partie de l’ensemble, un groupe de points intérieurs contenus en lui, voisins d’un point déterminé et constituant un espace interne ouvert en son sein. Celui-ci s’obtient en posant comme égaux cet espace interne avec la soustraction à cet espace interne de l'ensemble auquel il appartient. En ce sens, un point intérieur de l'ensemble peut être posé comme voisin de cet ensemble. En ce sens encore, un ensemble ouvert, c'est-à-dire égal à son intérieur, est en voisinage de chacun de ses points. Enfin, pour tout point de l'ensemble, son voisinage contient un voisinage ouvert de ce point qui est son intérieur. Ajoutons que la notion de voisinage dans un espace topologique est synonyme de celle plus globale d'*ouvert* qui s'applique à chacun des ses points, en considérant qu'aucun de ceux-ci n'appartient à la frontière de cet espace et que celui-ci est en voisinage avec chacun de ses points.

Et si l'on étend la notion de voisinage par des applications continues aux relations entre différents espaces, celle-ci est conservée. On peut de plus si l'on définit le voisinage comme induit par une distance mesurable entre les points obtenir la notion d'*espace métrique*, c'est-à-dire un ensemble dans lequel la distance entre les points est bien définie, par exemple la droite, le plan, l'espace tridimensionnel ou l'espace euclidien ou des espaces vectoriels. Ce qui s'applique encore aux objets qui en découle, comme le cercle, la sphère, le tore ainsi que les propriétés de l'espace courbe de Riemann, dites *variétés*.

La topologie s'avère compatible avec les structures algébriques, par l'association d'un espace topologique avec des objets algébriques comme le nombre, le groupe, une espace vectoriel, domaines de l'algèbre qui vérifient des lois de composition internes ou externes. Il en découle les notions de groupe topologique ou d'espace vectoriel topologique, plus particulièrement dans le domaine de l'analyse fonctionnelle, celle des espaces de fonctions. Par ailleurs on appelle *structure* en mathématiques, depuis les travaux du groupe Bourbaki, le résultat d'une analyse selon la méthode axiomatique des relations au sein d'un ensemble d'éléments :

> « On peut maintenant faire comprendre ce qu'il faut entendre, d'une façon générale, par une *structure mathématique*. Le trait commun des diverses notions désignées sous ce nom générique, est qu'elles s'appliquent à des ensembles d'éléments dont la nature *n'est pas spécifiée* ; pour définir une structure, on se donne une ou plusieurs relations, où interviennent ces éléments [...] ; on postule ensuite que la ou les relations données satisfont à certaines conditions (qu'on énumère) et qui sont les *axiomes* de la structure envisagée. Faire la théorie axiomatique d'une structure donnée, c'est déduire les conséquences logiques des axiomes de la structure, *en s'interdisant toute autre hypothèse* sur les éléments considérés (en particulier, toute hypothèse sur leur « nature » propre). ». [4]

Il s'ensuit que la topologie algébrique ou combinatoire associe à chaque espace topologique des invariants algébriques comme des *nombres*, des

[4] Nicolas Bourbaki. « L'architecture des mathématiques » in François Le Lionnais, *Les grands courants de la pensée mathématique*, Paris, Hermann,1948, p. 35-47

groupes, des *modules* ou des *anneaux* qui permettent de les distinguer, en particulier dans le cadre de la théorie des *nœuds*. Il s'agit de la sorte de vérifier des propriétés morphiques, des homomorphismes, ou homologiques entre deux structures, par exemple algébriques.

A partir de quoi se dégage une topologie générale fondée sur une méthode axiomatique ensembliste qui définit les notions et constructions les plus générales utilisées dans les espaces topologiques : limites, continuité, voisinage, ouverture, fermeture, adhérence.

Enfin, il existe une *topologie différentielle* qui se restreint à l'étude des variétés différentielles, issues de la géométrie différentielle, autrement dit aux figures des « espaces courbes » : courbes, surfaces, tores, sphères, etc., ou aux figures obtenues par recollement d'espaces simples comme dans la bande de Moebius. Ces *variétés* ou *espaces courbes* sont localement modelés sur l'espace euclidien donné de dimension *n,* et elles permettent de généraliser une bonne part des opérations du calcul différentiel et intégral. D'autre part, on peut étudier ces variétés en posant que chaque point admet un voisinage homéomorphe à une boule de dimension finie et qui n'est pas nécessairement de nature sphérique.

Voilà pour ce qu'il en est du contexte de définition de la topologie.

5/ La théorie des catégories

Une fois exposé ce que nous pouvions espérer comprendre de la théorie topologique, nous pouvons revenir à celle des catégories. Certes, ce que nous avons pu comprendre s'avère limité pour un mathématicien professionnel, mais il faut bien essayer a minima de s'informer des mathématiques quand on est philosophe ou psychanalyste. Disons que nous avons essayé de nous en faire une idée. Néanmoins les mathématiques sont d'une grande complexité qui échappe non seulement très largement à l'interprétation philosophique de leur sens, mais plus encore à ceux qui ne les ont pas suffisamment et longuement étudiées.

Ce qui parait nodal dans le passage de la topologie et de la théorie des ensembles au catégories, semble être la notion d'*homéomorphie*, reposant sur l'idée mathématique de *morphisme*. Précisons. De nouveau utilisons le dictionnaire Wikipédia des mathématiques :

> « En mathématiques, le terme « morphisme » désigne une notion fondamentale permettant de comparer et de relier des objets mathématiques entre eux. En algèbre générale, un morphisme (ou homéomorphisme) est une application entre deux structures algébriques de même espèce, c'est-à-dire des ensembles munis de lois de composition interne ou externe (par exemple deux groupes ou deux espaces vectoriels), qui respectent certaines propriétés en passant d'une structure à l'autre. Plus généralement, la notion de morphisme est l'un des concepts de base en théorie des catégories ; ce n'est alors pas nécessairement une application,

mais une « flèche » reliant deux « objets » ou «structures » qui ne sont pas nécessairement des ensembles.»

Complémentaire de la notion précédente, en topologie un *homéomorphisme* est une application bijective d'un espace topologique dans un autre dont la bijection réciproque est continue.

« Autrement dit, un homéomorphisme entre deux espaces topologiques X et Y suppose l'existence entre eux d'une application biunivoque, selon laquelle :

Si pour tout couples de points : $x \neq x'$ et si on a : $f(x) \neq f(x')$, alors si : $[f(x) = f(x')] \rightarrow (x = x')$

Et si l'application bijective f possède une application inverse : g = f – 1 définie pour : y E f (X) par l'équivalence : [g (y) = x] = [f (y) = x]

Et si l'application f est continue, biunivoque et si son inverse f -1 est aussi continue, on dit que f est un homéomorphisme. On dit encore que les espaces X et Y sont homéomorphes.

Par ailleurs s'il existe un homéomorphisme f qui applique X sur l'espace Y entier, c'est-à-dire si on a : Y = f (X), il est clair que :

1/ (f -1) -1 = f

2/ Si f est un homéomorphisme, alors f -1 en est aussi un.

3/ La relation d'être homéomorphe est réflexive, symétrique et transitive. » [5]

Là est peut-être l'un des passages probables de la topologie à la théorie des catégories développée par Grothendieck. Reprenons la présentation de la théorie des catégories :

« Dès 1952, en définissant les théories de l'homologie comme foncteurs d'une catégorie d'espaces topologiques dans une catégorie algébrique vérifiant certains axiomes et en classifiant ces théories, Eilenberg et Steenrod mettaient en évidence le rôle des catégories comme outil pour la topologie algébrique. »

Il s'agit ici d'homologie, au sens mathématique de type de correspondance entre deux points permettant de transformer une figure dans l'espace en une autre équivalente. Quel rapport entre homologie et homéomorphie, le premier nous apparaissant comme une notion initiale plus commune qui en géométrie faisait apparaître des propriétés logiques simples à l'origine de la seconde. Reprenons encore le dictionnaire Wikipédia. Il est remarquable de voir qu'elle va convoquer la notion de *trou* dont Lacan fera un usage abondant en psychanalyse. Rappelons qu'un trou présentifie formellement un vide, un évidement au sein d'un objet qui le caractérise, un certain être d'un ne-pas-être qui participerait de sa définition :

« En mathématiques, l'homologie est une manière générale d'associer une séquence d'objets algébriques tels que des groupes abéliens ou des modules à d'autres objets

[5] Kuratowski, Kazimirerz. *Introduction à la théorie des ensembles et à la topologie.* L'enseignement mathématique. Institut de mathématiques de l'université de Genève. Imprimerie Kundig, 1966., p. 148-149.

mathématiques tels que des espaces topologiques. Les groupes d'homologie ont été définis à l'origine dans la topologie algébrique. Des constructions similaires sont disponibles dans beaucoup d'autres contextes, tels que l'algèbre abstraite, les groupes, les algèbres de Lie, la théorie de Galois et la géométrie algébrique. La motivation initiale pour définir les groupes d'homologie était l'observation que deux formes peuvent être distinguées en examinant leurs **trous**. Par exemple, un cercle n'est pas un disque car le cercle est perforé alors que le disque est solide et la sphère n'est pas un cercle car la sphère renferme un **trou** bidimensionnel alors que le cercle renferme un **trou** unidimensionnel. Cependant, étant donné qu'un **trou** n'est "pas là", ni la définition d'un trou ni comment distinguer différents types de **trous** n'est évident. L'homologie était à l'origine une méthode mathématique rigoureuse pour définir et classer les **trous** dans une variété. En gros, un *cycle* est une sous-variété fermée, une *limite* est un cycle qui est également la limite d'une sous-variété et une *classe d'homologie* (qui représente un **trou**) est une classe d'équivalence de cycles modulo une limite. Une classe d'homologie est donc représentée par un cycle qui n'est la limite d'aucune sous-variété : le cycle représente un **trou**, à savoir une variété hypothétique dont la limite serait ce cycle, mais qui "n'est pas là". Il existe de nombreuses théories d'homologie. Un type particulier d'objet mathématique, tel qu'un espace topologique ou un groupe, peut avoir une ou plusieurs théories d'homologie associées. Lorsque l'objet sous-jacent a une interprétation géométrique, à l'instar des espaces topologiques, le *n*ième groupe d'homologie représente le comportement dans la dimension *n*. La plupart des groupes d'homologie ou des modules peuvent être formulés en tant que foncteurs dérivés sur des catégories abéliennes appropriées, en mesurant l'incapacité d'un foncteur à être exact. Dans cette perspective abstraite, les groupes d'homologie sont déterminés par des objets d'une catégorie dérivée. »

Ici un autre terme clef nous apparait, c'est celui de *foncteur*. Un foncteur est la généralisation en théorie des catégories de la notion de morphisme. Il y a différentes sortes de foncteurs dont le nom évoque à la fois des valeurs logiques et métaphoriques : d'identité, d'oubli, constant, et les foncteurs sont fidèles, conservatifs, adjoints. C'est là déjà entrer dans la *théorie des catégories* dont les nominations métaphoriques des concepts sont étonnantes et surprenantes, poétiques et suggestives. Nous avons vu que le terme de *morphisme* en mathématiques désigne une notion fondamentale permettant de comparer et de relier des objets mathématiques entre eux. On comprendra que la *théorie des catégories* est une théorie analytique des propriétés les plus générales des systèmes logiques de relation entre les structures mathématiques basée sur l'algèbre ensembliste et la topologie. Ambitieux projet que celui-là. Il fait lointainement écho au souci aristotélicien d'une analytique conceptuelle générale de toutes les propriétés possibles des classes d'objets, en leur genre et espèce, en compréhension et en extension.

Revenons quelque peu maintenant sur la définition de la *théorie des catégories* et essayons d'en comprendre les enjeux à notre manière. Les catégories sont nées en mathématiques de l'abondance de caractéristiques communes à diverses classes d'objets étudiés par les mathématiciens. Elles apparaissent par leurs nombreuses utilisations possibles en mathématiques, informatique théorique, physique. L'originalité de cette théorie est de pouvoir représenter toute classe d'objets par un réseau de flèches et de points visés par ces flèches. Un tel réseau graphique peut être défini comme un *graphe orienté*. C'est la notion de graphe ici qui m'intéresse. Je l'avais évoqué précédemment. En théorie des catégories, il s’agit d’un graphe orienté. Nous avions donné précédemment la définition de la théorie des graphes. Reprenons là encore une fois :

> « Un **graphe** est une structure composée d'objets dans laquelle certaines paires d'objets sont en relation. Les objets correspondent à des abstractions mathématiques et sont appelés *sommets* (ou *nœuds* ou *points*), et les relations entre sommets sont des *arêtes* (ou *liens* ou *lignes*). On distingue les graphes non orientés, où les arêtes relient deux sommets de manière symétrique, et les graphes orientés, où les arêtes, alors appelées *flèches*, relient deux sommets de manière asymétrique. Un graphe est fréquemment représenté par un diagramme sous la forme d'un ensemble de points pour les sommets, joints entre eux par des lignes droites ou courbes pour les arêtes, éventuellement munies de flèches pour le cas de graphes orientés. »

Ce qui retient ici mon attention à la différence de l’algèbre ensembliste, c’est le recours à une structuration graphique de l’analyse logique. Il faudrait donc opposer une algèbre logique plutôt littérale, cartésienne en quelque sorte, dans un autre registre lexical plutôt *grammatologique* ou *syntaxique*, avec une logique idéographique, cette fois non pas au sens d’une écriture linéaire plutôt algébrique, mais d’un schéma logique analytique de nature relationnelle et graphique, si l’on veut d’une écriture « figurale » spatiale de la logique des relations ou déductions et de leurs propriétés générales. *Idéographie* est alors un terme qui ne convient peut-être pas, bien qu’étymologiquement idée renvoie à la vision. C’est le terme par lequel on a pris l’habitude de traduire la notion de ce qui serait plutôt littéralement cette écriture conceptuelle proposée par le logicien G. Frege, en allemand *Begriffschrift,* littéralement saisir par l’écriture, le verbe *begreifen* signifiant à la fois saisir, comprendre, concevoir. Par ce terme, il voulait désigner l’écriture des structures formelles pures du raisonnement logique sous-jacent utilisé en arithmétique.[6] Ce faisant il reprenait le projet de Leibniz d’une écriture fonctionnelle universelle des schèmes ou lois logiques, reposant sur des axiomes assurés. Pour cela, il aura eu recours à des formes graphiques et symboliques schématiques qui dessinent ou figurent les relations logiques. Par exemple pour désigner l’implication, il employait le « graphe » ou la notation suivante qui n’est pas un graphe au sens mathématique du terme :

```
─┬─B
 └─A
─┬┬─A
  └┬─B
```

[6] Frege, Gottlob. *L’Idéographie. Un langage formulaire de la pensée pure construit d’après celui de l’arithmétique.* Paris, Vrin, 2017.

On l’écrit aujourd’hui plus simplement sous la forme : $B \to A$ ou $\neg B \to \neg A$. Nous allons y revenir. Les mots ici peut-être nous manquent ou bien se multiplient. Nous sommes débordés par eux.

6/ L’hypothèse d’une graphie ou d’une *graphétique* de la logique pure.

Je me permets maintenant de sortir, de quitter le champ des mathématiques ou de la logique pure pour revenir à celui de la réflexion et de la spéculation philosophiques. Je vous prie de m’en excuser, je l’ai dit, je ne sais pas les mathématiques. Je sais seulement un peu de philosophie, si peu, et moins de mathématiques que bien des philosophes plus sérieux et conséquents. Je m’en remets au risque de l’interrogation maïeutique. Posons-nous ici une question, pourquoi la logique ne devrait-elle pas seulement s’écrire, comme sous la forme d’une logique des prédicats ou des propositions, ou d’une algèbre littérale, mais, pour ainsi dire, aussi se graver, se tracer, se tramer, s’inscrire dans un réseau de lignes, de graphes, comme une *analysis situs* pour reprendre l’expression de Leibniz ? Dans un réseau de flèches, de *catégories* et de *topos*, ou de *foncteurs*. Après tout, Euler et Venn, avaient bien vu que l’on pouvait traduire de façon graphique, par des entrelacs de figures géométriques, de cercles, les formes du raisonnement logique, du syllogisme, en faisant de la sorte apparaître ses propriétés régulières, par exemple de réunion et d’intersection, de contenant et de contenu, de prémisses et de conséquences, ou d’inclusion et d’appartenance. Dans des diagrammes donc. En mathématiques, un *diagramme* est un schéma utilisé pour représenter des objets et servant de support à un raisonnement. On pourrait poser pour caractériser cela la dénomination incongrue de *graphologie*, bien que ce terme ait un sens totalement inapproprié, celui d’une analyse du caractère d’une personne par l’étude du style graphique de son écriture, voire plus péjoratif comme dans graphomanie. Si l’on ne s’en tient pas à la notion de diagramme, il faudrait faire intervenir un détournement de sens, peut-être celui d’une graphématique ou de graphémique. Ce terme renvoie en linguistique à la science des graphèmes dans leur rapport aux phonèmes. Cependant, elle en appelle aussi à la *graphotactique* et à la *graphétique*, à la *paléographie* et à la *typographie*, à la *graphémologie*. Ne faudrait-il pas plutôt en accentuant la confusion introduire un néologisme, celui de *diagrammologie* ?

En son temps, Le philosophe J-F Lyotard avait analysé un rapport *discours-figure*, au sein duquel il introduisait le terme de *figural*, du figural dans un sens non littéraire, sens qui est sinon celui d’un usage massif des figures.[7] Il ne s’agissait pour lui ni d’un graphique, ni d’une simple

[7] Lyotard, Jean-François. *Discours, Figure.* Paris, Klincksieck, 1971.

figuration, mais d'autre chose qui faisait écho au schématisme transcendantal kantien, à la synthèse produite par l'imagination entre la conception et la perception, celle d'un quelque chose qui se dessine dans la forme et les figurations que le langage ne peut cribler ou contenir et qui ne s'objective pas non plus intégralement dans ce qui peut se tracer ou se tramer au sein d'une représentation d'objet. Ces derniers temps, dans les rues des métropoles urbaines est apparu l'art sauvage des graphes, ces dessins-signatures tracés sur les murs des habitations et des friches industrielles, mêlant écriture et traits stylisés graphiques. Ils semblent attester d'un besoin populaire de s'inscrire et de s'écrire, de se signer ou de signer quelque chose quelque part, ou encore de configurer de façon graphique l'espace vécu, les lieux. Nous sommes là bien sûr loin de la *théorie des catégories*. Mais ne peut-on pas trouver dans cette graphie, dans cet art populaire, une expression spéculaire de la logique comme écriture et graphie ? Nous ne distinguerons pas ici *tag* et *graff,* le second relevant directement de l'art graphique, le premier étant une simple signature. Disons seulement qu'ils procèdent tous deux d'une même dynamique d'appréhension du lieu, des places. Le graffiti se supporterait ainsi d'une théorie logique de la relation, de la limite et de la frontière, voire des invariants structuraux de l'objet de connaissance ou bien du désir en son improbable territorialité. De tels graffitis, parfois maladroitement tracés, apparaissent aussi comme des objets déformés déformants, comme des éléments d'une géométrie qu'on pourra voir de nature topologique et dont les contours ne seraient pas tout à fait toujours nettement définis. Si l'on s'en tient à la préhistoire, les premières écritures ont d'emblée mêlé des formes scripturaires linéaires avec de signes figuraux abstraits, avec des représentations géométriques, voire topologiques, des réseaux complexes de figures entrelacées et plutôt énigmatiques. La théorie des ensembles, elle aussi, a bien eu recours à des diagrammes sagittaux pour visualiser les relations d'application entre deux ensembles. N'est-ce pas là la persistance d'une fonction symbolique dont la trame en extension ne peut s'attester que du côté d'un imaginaire de l'objet, d'un schématisme du conçu, du perçu dont la trame s'imprime en creux tout autant du côté des ressources du langage et de l'écriture que de celles de la figuration. Le spectre du *figural*, peut-être ?

Conclusion.

Pour conclure, je voudrais ici prendre un risque spéculatif qui pourrait me rendre ridicule en vous proposant une théorie synthétique minimale des conditions de la pensée, une sorte d'axiomatique de la pensée par réduction. Pourquoi pas, je ne serais pas tout à fait le premier dans cette voie qui ne procède pas du préalable d'une définition du sujet ou d'un sens métaphysique de « la réalité ». Disons là en rupture avec la conception traditionnelle kantienne de la pensée connaissante qui suppose toujours que : *une connaissance est une représentation liée à la conscience et se rapportant à un objet.* On laissera de côté très arbitrairement les notions de conscience, de connaissance et de représentation. On leur substituera les termes de pensée, langage et objet, sans s'affecter plus que ça de l'indétermination de l'agent de la pensée ou de l'expression.

Par réduction, on affirmera trois axiomes premiers interdépendants :

Il y a de la pensée dont nous ne savons pas la nature ni le contenu, sans sujet substantiel.

Il y a du langage, des langages qui se donnent ou se rapportent à des objets quelconques.

Il y a de l'expression en acte qui traduit des perceptions, des affections et des conceptions.

Par définition, on posera :

La pensée est la relation d'un langage à un ou à des objets, afin de saisir quelque réel perçu ou conçu.

La relation d'objet se définit comme rapport d'un signe symbolique et d'un objet, d'une proposition et d'un référent, d'une expression et d'une visée, d'une structure énoncé et d'une classe d'objets, la saisie sémiotique de quelque chose qui se présente.

Dans un autre registre, articulation d'une fonction en *intension* avec une autre en *extension*.

Trois conséquences en découlent :

Premièrement : toute pensée peut s'écrire, se tracer, se figurer, se dire, se montrer, se disposer.

Deuxièmement : il y a des liens axiologiques et nécessaires entre graphie et écriture, entre littéralité et diagrammaticité, entre schématisation et iconographie.

Troisièmement : un réel objectif quelconque peut s'appréhender, mais de diverses façons non hiérarchisables en valeur.

Il existe pour cela au moins six modalités toujours compossibles entre elles qui seraient :

1/ La forme narrative du *raconter* qui est celle de la parole et du récit, du mythe et qui relève du temporel et de la succession ou de la sérialité. Quelque chose a eu lieu.

2/ La forme descriptive du *montrer* qui est celle du graphisme et du schématique qui est spatiale et pré-projective. Quelque chose se dessine.

3/ La forme explicative ou logique du *démontrer* qui est celle de l'inférence, de l'enchaînement des propositions, du raisonnement. Quelque chose se déduit.

4/ La forme projective ou topologique, qui est celle du *concevoir,* morphologique et structurale, relevant des perspectives, des mouvements et des réseaux, des faisceaux, du multiple des dimensions possibles et de leur éventuelle simultanéité. Quelque chose se dispose.

5/ La forme spéculative de *l'interpréter,* qui est celle de la conceptualisation sémantique, des conceptions et des explications globales qui organisent le sens. Quelque chose se comprend.

6/ La forme scripturale ou algébrique, celle du formaliser qui relève du littéral et du linéaire et de dispositifs de caractères et de syntaxes. Quelque chose peut s'écrire.

Certains d'entre vous m'objecteront qu'il n'y a pas là l'inconscient. Un supplément qui manque. Un soustrait oublié. Certes, mais c'est parce que celui-ci échappe à la pensée commune, et qu'il relève d'une antériorité achronique qui ne peut s'écrire et encore moins se figurer, un *ce qui ne cesse pas de ne pas pouvoir s'écrire,* comme le désigne Lacan pour nommer ce qu'il appelle le réel et que le philosophe J. Derrida désignait par la notion de *trace*. Je lui laisse la parole. Il écrivait de cette trace qui ne peut jamais s'inscrire ni se dessiner que :

> « N'étant jamais présente, n'étant rien, la trace racine commune de la parole et de l'écriture est inaccessible au savoir et à la science ». [8]

Ne s'agit-il pas ici de désigner une archi-écriture dont l'hypothétique existence, indiscernable et soustraite, tramerait à notre insu et à défaut les contours de toute expression, qu'elle soit narrative, graphique ou topologique, logique ou projective, interprétative ou scripturale, morphique ou algébrique, syntaxique ou iconique. Un espace inouï dans lequel viendrait se placer le plus originaire de toute inscription et qui ne pourrait jamais se dire ni se produire. Non point ici un sens ineffable, mais une écriture absente, indéchiffrable et chiffre de toute lettre ou figure. Un contenant vide dont la figure impossible à tracer serait celle d'un réel troué de son vide.

Paris, le 20 mai 2022.

---

[8] Derrida, Jacques. *Grammatologie.* Paris, Minuit, 1967, p. 109.